Aplikasi Kombinasi dengan Pengulangan dan Prinsip Inklusi-Eksklusi untuk Menghitung banyak Bilangan Bulat Nonnegatif Kurang dari 10 Pangkat k yang Jumlah Digitnya Sama dengan n dengan k dan n Bilangan Bulat Positif

Fakhri Muhammad Mahendra - 13521045[1]
Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia
[1]13521045@std.stei.itb.ac.id

***Abstrak*—Kombinasi dengan pengulangan dan Prinsip Inklusi-Eksklusi adalah dua konsep yang terdapat di bidang keilmuan Matematika Diskrit. Makalah ini akan membahas aplikasi dari kedua konsep tersebut untuk memecahkan suatu persoalan spesifik, yaitu banyak bilangan bulat positif dengan pangkat k yang jumlah digit-digitnya sama dengan n, dengan k dan n bilangan bulat positif. Akan dibahas penurunannya hingga hasil rumus akhirnya. Makalah ini juga akan melihat lebih lanjut generalisasinya serta aplikasi dari pemecahan persoalan ini.**

***Keywords*—Kombinasi dengan Pengulangan, Jumlah Digit, Matematika Diskrit, Prinsip Inklusi-Eksklusi, Stars and Bars.**

I. Pendahuluan

Matematika diskrit adalah cabang matematika yang membahas segala sesuatu yang bersifat diskrit, alih - alih bersifat kontinu. Topik yang dipelajari di Matematika diskrit salah satunya adalah bilangan bulat, graf, teori bilangan, himpunan, pohon, aljabar boolean, dan sebagainya.

Kombinatorika juga salah satu hal yang dipelajari di bidang keilmuan matematika diskrit. Kombinatorika mempelajari tentang bagaimana cara kita menghitung suatu kombinasi tertentu. Kombinatorika dipakai di berbagai bidang untuk membantu kita menyelesaikan banyak persoalan di dunia nyata. Beberapa konsep yang dibahas pada matematika diskrit meliputi, permutasi, kombinasi, faktorial, prinsip inklusi eksklusi, prinsip sangkar burung, stars and bars, dan sebagainya.

Pada makalah ini, akan dipecahkan suatu permasalahan dengan menerapkan ide yang ada di kombinatorika, khususnya ide tentang kombinasi berulang dan prinsip inklusi-eksklusi pada persoalan berikut "Menghitung banyak Bilangan Bulat Nonnegatif Kurang dari 10 Pangkat k yang Jumlah Digitnya Sama dengan n dengan k dan n Bilangan Bulat Positif" Makalah ini juga berisi langkah-langkah dan cara untuk mendapat jawaban dari permasalahan tersebut.

II. Landasan Teori

Himpunan

Himpunan adalah koleksi tidak berurut dari objek-objek yang berbeda, disebut elemen atau anggota dari himpunan. Ditulis

$$a \in A$$

Jika dan hanya jika a merupakan elemen dari himpunan A, dan sebaliknya, ditulis

$$a \notin A$$

Jika dan hanya jika a bukan merupakan elemen dari himpunan A.

Gabungan

Andai A dan B adalah suatu himpunan. Gabungan dari himpunan A dan B adalah sebuah himpunan yang beranggotakan elemen yang ada di A, atau di B, atau keduanya, yaitu

$$A \cup B = \{\, x \mid x \in A \vee x \in B \,\} \tag{2.1}$$

Irisan

Andai A dan B adalah suatu himpunan. Irisan dari himpunan A dan B adalah sebuah himpunan yang beranggotakan elemen yang ada di A dan B, yaitu

$$A \cap B = \{\, x \mid x \in A \wedge x \in B \,\} \tag{2.2}$$

Bilangan Bulat

Bilangan bulat adalah bilangan yang tidak memiliki pecahan desimal. Sebagai contoh

$$1, -1, 0, 45, -10$$

Merupakan bilangan bulat.

Kardinalitas Himpunan Berhingga

Andai S adalah himpunan. Jika terdapat tepat n elemen berbeda di S dan n adalah bilangan bulat non-negatif, maka kita sebut S himpunan berhingga, dan n sebagai kardinalitas dari S. Kardinalitas dari S dinotasikan sebagai $|S|$.

Faktorial

Nilai fungsi faktorial dari suatu bilangan bulat positif n, dinotasikan sebagai $f(n) = n!$, adalah hasil perkalian semua bilangan bulat positif yang tidak lebih besar dari n. Dari definisi tersebut didapat

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot (n) \tag{2.3}$$

Didefinisikan juga nilai dari $0! = 1$.

Aturan Perkalian

Apabila sebuah prosedur bisa di pecah menjadi dua bagian berurutan. Jika terdapat n_1 cara untuk melakukan bagian pertama dan untuk setiap cara melakukan bagian pertama, terdapat n_2 cara untuk melakukan bagian kedua, maka terdapat $n_1 n_2$ cara untuk melakukan prosedur tersebut.

Aturan Penjumlahan

Jika sebuah prosedur bisa dilakukan dengan antara satu dari n_1 langkah atau satu dari n_2 langkah, dimana himpunan dari langkah-langkah di n_1 dan himpunan langkah-langkah di n_2 tidak saling beririsan, maka terdapat $n_1 + n_2$ langkah untuk melakukan prosedur tersebut

Prinsip Inklusi-Eksklusi (2-Himpunan)

Andai A_1 dan A_2 adalah himpunan. Maka terdapat $|A_1|$ cara untuk mengambil sebuah elemen dari A_1 dan $|A_2|$ cara untuk mengambil elemen dari A_2. Banyak cara untuk mengambil sebuah elemen dari A_1 atau A_2 adalah banyak cara mengambil sebuah elemen dari gabungan keduanya, yaitu $|A_1 \cup A_2|$, dimana nilai tersebut merupakan jumlah dari banyak cara memilih elemen dari A_1, ditambah banyak cara untuk mengambil elemen dari A_2, dikurangi banyak cara untuk mengambil sebuah elemen yang berada di A_1 dan A_2. Karena terdapat $|A_1 \cap A_2|$ banyak cara untuk mengambil elemen yang sama dari kedua himpunan, maka kita punya

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| \tag{2.4}$$

Prinsip Inklusi-Eksklusi (3-Himpunan)

Jika A_1, A_2, dan A_3 adalah suatu himpunan, maka banyak cara untuk memilih sebuah elemen dari A_1, A_2, atau A_3 dinyatakan dalam persamaan berikut

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup A_3| &= |A_1| + |A_2| + |A_3| \\ &-|A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| \\ &+|A_1 \cap A_2 \cap A_3| \end{aligned} \tag{2.5}$$

Prinsip Inklusi-Eksklusi (n-Himpunan)

Secara umum jika terdapat n buah himpunan $A_1, A_2, \ldots A_n$ maka banyak cara untuk memilih sebuah elemen dari gabungan dari $A_1, A_2, \ldots A_n$ adalah

$$\begin{aligned} &|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \\ &\sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i \le j \le n} |A_i \cap A_j| \\ &+ \sum_{1 \le i \le j \le l \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots \\ &+(-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n| \end{aligned} \tag{2.6}$$

Permutasi Objek Berbeda

Permutasi dari suatu himpunan dengan objek berbeda adalah susunan berurut dari objek-objek tersebut. Sementara, urutan terurut dari r-elemen dari suatu himpunan disebut permutasi r.

Banyak permutasi r dari suatu himpunan dengan n elemen dinotasikan dengan $P(n, r)$. Bisa dicari nilai $P(n, r)$ dengan aturan perkalian sehingga didapat hasil

Jika n adalah bilangan bulat positif dan r adalah bilangan bulat yang memenuhi $1 \le r \le n$ maka terdapat

$$P(n, r) = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-r+1) \tag{2.7}$$

Perhatikan bahwa $P(n, 0) = 1$ selama n adalah bilangan bulat non-negatif karena hanya terdapat tepat 1 cara untuk mengurutkan nol elemen. Dari fakta tersebut dan (2.7) didapat

Jika n dan r adalah bilangan bulat sehingga $0 \le r \le n$, maka

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!} \tag{2.8}$$

Kombinasi

kombinasi-r dari sebuah himpunan adalah pemilihan r elemen tak terurut dari himpunan tersebut. Banyak kombinasi-r dari sebuah himpunan dengan n elemen berbeda dinotasikan sebagai $C(n, r) = \binom{n}{r}$ yang juga disebut sebagai koefisien binomial. Dengan memakai aturan perkalian, kita memiliki

Banyak dari kombinasi-r dari sebuah himpunan dengan n elemen adalah

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} \tag{2.9}$$

Dimana n bilangan bulat non-negatif dan r bilangan bulat yang memenuhi $0 \le r \le n$.

Permutasi Objek yang Boleh Sama

Permutasi berbeda dari n object, dimana terdapat n_1 objek yang sama dengan tipe 1, n_2 objek yang sama dengan tipe 2, …, dan n_k objek yang sama dengan tipe adalah

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_{k!}} \tag{2.10}$$

Kombinasi dengan Pengulangan

Terdapat

$$C(n+r-1, r) = C(n+r-1, n-1) \tag{2.11}$$

kombinasi-r dari sebuah himpunan dengan n elemen jika pengulangan tiap elemen diperbolehkan.

Stars and Bars

Dengan bantuan skema stars and bars, kita dapat melihat bahwa banyak solusi k elemen bilangan bulat nonnegatif $x_1, x_2, \dots, x_k$ sehingga

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$$

Dengan n bilangan bulat, sama saja dengan menghitung kombinasi-(k-1) dari $n + k - 1$ elemen, yaitu

$$C(n + k - 1, k - 1)$$

III. PERUMUSAN MASALAH

Deskripsi Masalah

Pada makalah ini, hal masalah yang ingin dipecahkan adalah sebagai berikut

Berapa banyak bilangan bulat positif yang kurang dari 10^k dan jumlah digit-digit dari tiap bilangan tersebut bernilai n, dimana k dan n adalah bilangan bulat positif

Penyederhanaan Masalah

Perhatikan bahwa semua bilangan bulat non-negatif yang kurang dari 10^k memiliki jumlah digit yang kurang dari sama dengan k. Sebagai contoh jika $k = 4$ didapat $10^4 = 10000$, dan bilangan dengan 1, 2, 3, dan 4 digit pasti nilai nya kurang dari 10000.

Semua kemungkinan bilangan dengan digit kurang dari sama dengan k bisa direpresentasikan bentuk berikut.

$$\sum_{i=1}^{k} 10^{k-i} \cdot a_i = 10^{k-1} \cdot a_1 + 10^{k-2} \cdot a_2 + \cdots + a_k \quad (3.1)$$

dengan $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathrm{Z}$ dan $0 \leq a_1, a_2, \dots, a_k \leq 9$ Sebagai contoh, apabila $k = 4, a_1 = 0, a_2 = 7, a_3 = 0$, dan $a_4 = 5$. Maka bilangan yang direpresentasikannya adalah

$$10^3 \cdot 0 + 10^2 \cdot 7 + 10^1 \cdot 0 + 10^0 \cdot 5 = 705$$

Perhatikan kembali bahwa $a_1, a_2, \dots, a_k$ masing-masing merupakan digit-digit dari bilangan yang direpresentasikannya, dengan catatan kita memberi tambahan digit nol pada bilangan yang digit nya kurang dari k. Maka dari aturan bahwa jumlah digit-digit dari tiap bilangan bernilai n, didapat

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k = n \quad (3.2)$$

Maka dengan (3.1) dan (3.2) permasalahan dapat disederhanakan menjadi

Banyak solusi dari berbeda dari k bilangan bulat $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathrm{Z}$, sehingga

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k = n$$

Dengan $0 \leq a_1, a_2, \dots, a_k \leq 9$.

IV. PEMBAHASAN

Kasus k= 4 dan n = 19

Dapat dihitung banyak kemungkinan kombinasi berulang 4 elemen $x_1, x_2, \dots, x_4$ sehingga

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_4 = 19 \quad (3.3)$$

Dengan memakai pendekatan stars and bars. Didapat kemungkinan sebanyak

$$C(n + k - 1, k - 1) = C(19 + 4 - 1, 4 - 1) = C(23,3) \\ = 1540 \quad (3.4)$$

Perlu diingat bahwa nilai dari masing-masing elemen x_i dengan $i = 1, 2, \dots, 4$ tidak ada yang dibatasi, sehingga terdapat kasus dimana nilai salah satu $x_i \geq 10$. Hasil (3.4) perlu dikurangi kasus ketika terdapat minimal satu elemen $x_i \geq 10$. Hal ini bisa dilakukan dengan mengatur nilai satu atau lebih dari nilai $x_i \geq 10$.

Klaim 1: hanya terdapat paling banyak satu elemen dari x_i yang nilainya lebih besar sama dengan 10

Bukti: Akan dibuktikan dengan kontradiksi. Asumsi kan sebaliknya benar maka bisa terdapat kombinasi dengan setidaknya dua elemen x_i yang nilainya lebih dari 9. Tanpa mengurangi keumuman, anggap elemen tersebut adalah x_1 dan x_2, maka

$$x_1, x_2 \geq 10 \\ \Rightarrow 19 = x_1 + x_2 + \cdots + x_4 \geq x_1 + x_2 \geq 20$$

Kontradiksi karena terdapat pernyataan bahwa $19 \geq 20$. Maka klaim terbukti.

Maka dari hasil klaim 1, kita hanya perlu mengecek apabila salah satu dari nilai $x_i \geq 10$. Tanpa mengurangi keumuman ambil $x_1 \geq 10$. Andai z_1 bilangan bulat nonnegatif sehingga $x_1 = z_1 + 10$. Dengan ini nilai $x_1 \geq 10$. Subtitusi nilai x_1 ke (3.3) didapat

$$z_1 + 10 + x_2 + \cdots + x_4 = 19 \\ \Rightarrow z_1 + x_2 + \cdots + x_4 = 9 \quad (3.5)$$

Dari hasil (3.5), kita lakukan lagi pendekatan stars and bars untuk menemukan semua kombinasi yang mungkin, yaitu sebanyak

$$C(n + k - 1, k - 1) = C(9 + 4 - 1, 4 - 1) = C(12, 3) \\ = 220 \quad (3.6)$$

Perlu diingat bahwa terdapat $C(4,1)$ cara untuk memilih satu x_i yang nilainya lebih dari sama dengan 10 dari empat kemungkinan, sehingga dengan aturan perkalian, hasil dari (3,6) harus dikali $C(4,1)$ untuk merepresentasikan banyak kejadian dimana salah satu dari x_i bernilai lebih dari sama dengan 10.

Maka hasil akhir bisa didapat dengan mengurangi hasil (3.4) dengan banyak cara yang tidak valid, yaitu

$$= C(22,3) - C(4,1) \cdot C(12,3) = 660 \qquad (3.7)$$

Kasus k = 4 dan n = 29

Perhatikan dengan cara yang sama pada kasus $n = 19$, dihitung kombinasi berulang untuk 4 elemen x_i dengan $i = 1,2,\dots,4$ yang memenuhi

$$x_1 + x_2 + \cdots x_4 = 29 \qquad (3.8)$$

Dengan pendekatan stars and bars maka jumlah banyak cara tersebut adalah

$$\begin{aligned} C(n+k-1, k-1) = C(29+4-1, 4-1) &= C(32,3) \\ &= 1540 \end{aligned} \qquad (3.9)$$

Selanjutnya perlu dihitung kembali banyak kasus dimana terdapat nilai x_i yang terlewat batas, yaitu $x_i \geq 10$. Bagi kasus berdasarkan banyak elemen x_i yang terlewat batas

Klaim 2: Hanya terdapat paling banyak 2 elemen x_i yang nilainya lebih dari sama dengan 10.

Bukti: akan dibuktikan klaim 2 dengan kontradiksi, asumsikan sebaliknya benar, maka minimal terdapat suatu kasus dimana nilai tiga x_i yang berbeda nilai nya masing-masing lebih dari sama dengan 10 semua. Tanpa mengurangi keumuman, anggap angka x_i yang dimaksud adalah $i = 1,2$, dan 3. Maka perhatikan bahwa

$$\begin{gathered} x_1, x_2, x_3 \geq 10 \\ 29 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq x_1 + x_2 + x_3 \geq 30 \end{gathered}$$

Terdapat kontradiksi dimana dinyatakan $29 \geq 30$. Sehingga dapat diketahui bahwa asumsi salah, dan sebaliknya, yaitu klaim terbukti benar.

Untuk kasus pertama, anggap kita perlu menghitung ketika minimal terdapat satu elemen x_i yang nilainya lebih dari sama dengan 10. Tanpa mengurangi keumuman, anggap $x_1 \geq 10$. Sama seperti dengan kasus ketika $n = 19$, ambil z_1 bilangan bulat nonnegatif sehingga $x_1 = z_1 + 10$. Subtitusi nilai ini ke (3.8), akan didapat

$$\begin{gathered} z_1 + 10 + x_2 + \cdots + x_4 = 29 \\ \Rightarrow z_1 + x_2 + \cdots + x_4 = 19 \end{gathered} \qquad (3.10)$$

Dengan pendekatan stars and bars, maka bisa dihitung banyak kombinasi yang memenuhi, yaitu

$$C(19 + 4 - 1, 4 - 1) = C(22, 3) \qquad (3.11)$$

Karena di awal kita harus memilih 1 elemen x_i dari 4 pilihan agar terlewat batas, maka sebagai total, terdapat

$$C(4,1) * C(22,3) \qquad (3.12)$$

kombinasi, dimana terdapat minimal satu elemen x_i yang nilainya lebih dari sama dengan 10.

Kasus kedua yang harus dihitung adalah ketika terdapat minimal 2 elemen x_i yang nilainya lebih dari sama dengan 10.

Perhatikan bahwa kasus ini sebenarnya sudah beririsan dengan kasus sebelumnya dimana minimal terdapat 1 elemen x_i yang melewati bahas. Namun secara tidak langsung, setiap kemungkinan pada kasus dua ini, sudah dikurang dua kali pada kasus sebelumnya. Maka dengan prinsip inklusi-eksklusi, kita hanya perlu menambahkan kembali banyak kombinasi yang mungkin di kasus kedua, agar tidak terjadi kembali perhitungan ganda.

Tanpa mengurangi keumuman, anggap $x_1, x_2 \geq 10$. Lalu ambil z_1, z_2 bilangan bulat nonnegatif sehingga $x_1 = z_1 + 10$ dan $x_2 = z_2 + 10$. Lalu subtitusi x_1 dan x_2 ke (3.8), didapat

$$\begin{gathered} z_1 + 10 + z_2 + 10 + x_3 + x_4 = 29 \\ \Rightarrow z_1 + z_2 + x_3 + x_4 = 9 \end{gathered} \qquad (3.13)$$

Dari hasil (3.13) dan pendekatan stars and bars, maka banyak kombinasi ada sebanyak

$$C(9 + 4 - 1, 4 - 1) = C(12,3) \qquad (3.14)$$

Perlu diingat kembali bahwa kita bisa memilih 2 elemen x_i dari 4 pilihan. Sehingga untuk mendapat banyak kombinasi yang mungkin pada kasus 2 hasil (3.14) perlu dikali kembali yaitu sebagai berikut

$$C(4,2) * C(12,3) \qquad (3.15)$$

Seperti yang sebelumnya sudah pernah disebut, kita gunakan prinsip inklusi-eksklusi untuk menggabungkan hasil (3.9), (3.12), dan (3.15) sedemikian sehingga tidak terjadi penghitungan ganda. Maka didapat hasil akhir untuk kasus $k = 4$ dan $n = 4$ adalah

$$\begin{aligned} C(32,3) - C(4,1) * C(22,3) + C(4,2) * C(12,3) \\ = 120 \end{aligned} \qquad (3.16)$$

Dengan membandingkan rumus yang dihasilkan pada (3.7) dan (3.16) terdapat kesamaan dan regularitas yang muncul secara berulang. Hal ini merupakan petunjuk untuk menemukan solusi umum dari permasalahan tersebut.

Untuk selanjutnya akan coba diselesaikan permasalahan untuk sembarang bilangan bulat positif k, n.

Kasus k,n Sembarang Bilangan Bulat Positif

Sama halnya dengan dua pendekatan sebelumnya, dihitung terlebih dahulu semua kombinasi x_i bilangan bulat nonnegatif dengan $i = 1, \dots, k$ yang memenuhi persamaan

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n \qquad (3.17)$$

Tanpa adanya restriksi terlebih dahulu.

Dengan pendekatan stars and bars didapat sebanyak

$$C(n + k - 1, k - 1) \qquad (3.18)$$

cara yang mungkin.

Langkah selanjutnya nya adalah dibagi kasus, yaitu ketika banyak elemen x_i yang lebih sama dengan 10 nya ada $1, 2, \ldots$ hingga nilai maksimal yang mungkin.

Klaim 3: Paling banyak terdapat $\lfloor n/10 \rfloor$ elemen x_i yang nilainya lebih dari sama dengan 10

Bukti: Akan dibuktikan klaim 3 dengan metode kontradiksi, asumsikan kebalikan dari klaim, maka minimal bisa terdapat $\lfloor n/10 \rfloor + 1$ elemen x_i yang nilainya lebih dari sama dengan 10. Asumsikan elemen-elemen x_i tersebut adalah $x_1, x_2, \ldots, x_{\lfloor n/10 \rfloor+1}$. Maka didapat

$$\begin{aligned} x_1, x_2, \ldots, x_{\lfloor n/10 \rfloor+1} &\geq 10 \\ \Rightarrow n = x_1 + x_2 + \cdots + x_k &= x_1 + x_2 + \cdots + x_{\lfloor n/10 \rfloor+1} \\ &\geq 10 \cdot (\lfloor n/10 \rfloor + 1) \end{aligned} \quad (3.19)$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} 10 \cdot (\lfloor n/10 \rfloor + 1) &= 10 \cdot \lceil (n+1)/10 \rceil \\ &\geq 10 \cdot \left((n+1)/10\right) = n + 1 \end{aligned} \quad (3.20)$$

Dari (3.19) dan (3.20) didapat

$$n \geq 10 \cdot (\lfloor n/10 \rfloor + 1) \geq n + 1 \quad (3.21)$$

kontradiksi, dimana terdapat pernyataan bahwa $n \geq n + 1$, sehingga klaim terbukti.

Ambil j sebagai jumlah elemen x_i yang nilai nya lebih dari sama dengan 10.

Untuk kasus $j = 1$. Didapat, tanpa mengurangi keumuman, representasi (3.17) berubah menjadi

$$z_1 + x_2 + \cdots + x_k = n - 10 \quad (3.22)$$

Dengan $z_1 \in Z^{0+}$ dan $x_1 = z_1 + 10$.

Dengan pendekatan stars and bars, banyak solusi dari (3.22) ada sebanyak

$$C(n - 10 + k - 1, k - 1) \quad (3.23)$$

Karena dipilih 1 elemen dari k elemen yang tersedia, maka hasil akhir yang harus diperhitungkan dari kasus $j = 1$ adalah

$$C(k, 1) \cdot C(n - 10 + k - 1, k - 1) \quad (3.24)$$

Untuk kasus j = 2, Didapat, tanpa mengurangi keumuman, representasi (3.17) berubah menjadi

$$z_1 + z_2 + x_3 + \cdots + x_k = n - 10 * 2 \quad (3.25)$$

Dengan $z_1, z_2 \in Z^{0+}$, $x_1 = z_1 + 10$ dan Dengan $z_1 \in Z^{0+}$ dan $x_2 = z_2 + 10$.

Dengan pendekatan stars and bars, banyak solusi dari (3.25) ada sebanyak

$$C(n - 10 * 2 + k - 1, k - 1) \quad (3.26)$$

Karena dipilih 2 elemen dari k elemen x_i yang tersedia, maka hasil akhir yang harus diperhitungkan pada kasus $j = 2$ sebanyak

$$C(k, 2) \cdot C(n - 10 * 2 + k - 1, k - 1) \quad (3.27)$$

Secara umum, untuk kasus $j = t$ dimana $t \in Z^+, 1 \leq t \leq \lfloor n/10 \rfloor$. Tanpa mengurangi keumuman, representasi (3.17) berubah menjadi

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_t + x_{t+1} + \cdots + x_k = n - 10 \cdot t \quad (3.28)$$

dimana $z_i \in Z^{0+}, x_i = z_i + 10$ untuk semua $i = 1, 2, \ldots, t$.

Dengan pendekatan stars and bars, banyak solusi dari (3.28) ada sebanyak

$$C(n - 10t + k - 1, k - 1) \quad (3.29)$$

Karena dipilih t elemen dari k elemen yang tersedia, maka hasil akhir yang harus diperhitungkan pada kasus $j = t$ sebanyak

$$C(k, t) \cdot C(n - 10t + k - 1, k - 1) \quad (3.30)$$

Perhatikan dari (3.30), telah ditemukan rumus general, banyaknya kombinasi pada tiap kasus. Dengan prinsip inklusi-eksklusi, kita harus mengganti tanda pada setiap nilai j yang ditangani. Hal ini dilakukan untuk mencegah penghitungan ganda terjadi.

Maka dari (3.18), (3.30) dan prinsip inklusi-eksklusi didapat jawaban akhir yaitu sebanyak

$$\begin{aligned} &= C(n + k - 1, k - 1) + (-1)^1 \cdot C(k, 1) \\ &\quad \cdot C(n - 10 \cdot 1 + k - 1, k - 1) + \cdots \\ &\quad + (-1)^{\lfloor n/10 \rfloor} \cdot C(k, \lfloor n/10 \rfloor) \\ &\quad \cdot C(n - 10 \cdot \lfloor n/10 \rfloor + k - 1, k - 1) \end{aligned} \quad (3.31)$$

Atau jika ditulis dengan notasi sigma

$$= \sum_{j=0}^{\lfloor n/10 \rfloor} (-1)^j \cdot C(k, j) \cdot C(n - 10j + k - 1, k - 1) \quad (3.32)$$

V. SIMPULAN

Matematika Diskrit secara umum dan kombinatorika secara khusu membawa banyak manfaat dan aplikasi. Salah satunya adalah dengan memecahkan permasalahan menghitung banyak bilangan bulat nonnegatif kurang dari 10 pangkat k yang jumlah digitnya sama dengan n dengan k dan n bilangan bulat positif. Sesuai dengan (3.32) permasalahan tersebut memiliki solusi akhir sebagai berikut

$$= \sum_{j=0}^{\lfloor n/10 \rfloor} (-1)^j \cdot C(k,j) \cdot C(n-10j+k-1, k-1)$$

Hal yang menarik adalah (3,32) tetap bisa bekerja, tidak hanya di basis 10, jika basis yang dipakai adalah x, maka (3.32) hanya perlu dimodifikasi sedikit sehingga menjadi

$$= \sum_{j=0}^{\lfloor n/10_x \rfloor} (-1)^j \cdot C(k,j) \cdot C(n-10_x j+k-1, k-1) \quad (3.33)$$

Salah satu bentuk umum dari permasalahan ini yang menarik untuk dibahas lebih lanjut adalah sebagai berikut "Jika dilempar k dadu berbeda dengan banyak sisi m berlabel $0,1,\ldots,m-1$ pada tiap sisinya, berapa banyak kombinasi dadu sehingga jumlah dari semua dadu bernilai n. Kasus yang dibahas di makalah ini hanyalah kasus khusus ketika m = 10.

VI. UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis ingin mengucapkan puji syukur kepada Tuhan Yang Maha Esa, karena dengan rahmat Nya penulis bisa menyelesaikan makalah berjudul "Aplikasi Kombinasi dengan Pengulangan dan Prinsip Inklusi-Eksklusi untuk Menghitung banyak Bilangan Bulat Nonnegatif Kurang dari 10 Pangkat k yang Jumlah Digitnya Sama dengan n dengan k dan n Bilangan Bulat Positif" tepat waktu. Terima kasih kepada dosen mata kuliah IF2120 Tahun 2022/2023 , Dr. Nur Ulfa Maulidevi, S. T, M. Sc., Dr. Ir. Rinaldi Munir, M. T., dan Dr. Fariska Zakhralativa Ruskanda, S.T. yang telah membimbing penulis selama berkuliah di mata kuliah Matematika Diskrit ini. Penulis juga ingin mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang terlibat, khusus nya Fatih Nararya R.I. karena telah memberi masukan ide, tentang topik makalah ini. Terakhir, penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada semua sumber yang telah dijadikan referensi pada makalah ini.

VII. DAFTAR PUSTAKA

[1] Munir, Rinaldi. 2020. "Teori himpunan (Bagian 1 - versi update 2022)". https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/Matdis/2022-2023/ diakses pada 12 Desember 2022, pukul 23.00 WIB.

[2] Munir, Rinaldi. 2020. "Teori Bilangan (Bagian 1)". https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/Matdis/2022-2023/ diakses pada 12 Desember 2022, pukul 23.00 WIB.

[3] Munir, Rinaldi. 2020. "Kombinatorial (Bagian 1)". https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/Matdis/2022-2023/ diakses pada 12 Desember 2022, pukul 23.00 WIB.

[4] Munir, Rinaldi. 2020. "Kombinatorial (Bagian 2)". https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/Matdis/2022-2023/ diakses pada 12 Desember 2022, pukul 23.00 WIB.

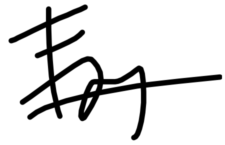
[5] Munir, Rinaldi. 2020. "Teori himpunan (Bagian 1 - versi update 2022)". https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/Matdis/2022-2023/ diakses pada 12 Desember 2022, pukul 23.00 WIB.

[6] Kenneth H. Rosen. 2011. 7th Edition of Discrete Mathematics and Its Applications. New York: McGrawHill. diakses pada 12 Desember 2022, pukul 23.00 WIB.

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 12 Desember 2022



Fakhri Muhammad Mahendra-13521045